Feuille 3 – Corrigé

Exercice 1 :

Pour  :

* car , et
* Soient

On a bien , donc pour tout

Ainsi , donc est un sev de .

Pour

On voit que la fonction nulle n’appartient pas à

Ainsi n’est pas un sev de .

Exercice 2 :

Quitte à réordonner les on peut supposer

Soient tels que

Alors ,

Car l’exponentielle ne s’annule jamais sur .

Or donc

Donc

Ainsi on a , ce qui implique .

On peut réitérer ce procédé pour tous les ou utiliser une récurrence finie.

Ainsi on prouve que , c’est-à-dire que la famille est libre.

Exercice 3

*Cet exercice est plus un exercice de raisonnement qu’autre chose. Pour l’inclusion de dans , il n’y a aucun problème, mais il réside dans la combinaison linéaire. Globalement, si vous voyez un produit de variables dans l’expression du « sev », ça n’en est sûrement pas un.*

Montrons que cet ensemble n’est pas un sev.

On a (ici on on prend simplement un couple qui annule chacun des facteurs de l’équation).

Or . En effet, .

Ainsi n’est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4

1. Montrons que est un sev de .

La fonction nulle est évidemment -périodique, reste à prouver que toute combinaison linéaire de fonction -périodique l’est également.

Soient et deux fonction -périodiques, alors et

. Ainsi

Ainsi toute combinaison linéaire de fonctions de est un élément de . Donc est un sev de .

Montrons que est un sev de .

La fonction nulle tend évidemment vers 0 en .

Soient , .

Alor

Donc toute combinaison de fonctions de est élément de . Donc est un sev de

1. Soit Alors et pour tout

On peut prouver très facilement que

Ainsi comme on a :

Donc c’est-à-dire est la fonction nulle.

Ainsi et l’autre implication est triviale.

Donc .

1. Soit la fonction définie sur telle que . Montrons que ne peut pas s’écrire comme élément de la somme . Soient , telles que .

on a

Or . C’est absurde, donc et ne sont pas en somme directe.